Wahrscheinlichkeitsberechnung – Kann man dem Glück auf die Sprünge helfen?

Thema Fragestellung

Wir haben uns gefragt, ob es möglich ist, auch ohne gezinkte Würfel bestimmte Zahlen häufiger zu würfeln.

Um das herauszufinden, haben wir verschiedene Winkel und Längen von "Würfelanlaufbrettern“ getestet. Sollte sich herausstellen, dass es bei bestimmten Winkeln oder Längen Häufungen gibt, werden wir versuchen, diese Winkel/Geschwindigkeiten auch von Hand zu trainieren.

Nebenher haben wir uns noch etwas mit Allgemeinem zur Wahrscheinlichkeitsberechnung auseinandergesetzt.

Arbeitshypothese

Wenn man weiß, wie man würfeln muss, kann man im Spiel seinem Würfelglück auf die Sprünge helfen.

Beschreibung derMaterialien

- verschiedene Würfel (3 unterschiedliche „normale“; Dice-Würfel)
- 3 selbst gebaute „Würfelbretter“ 20, 40 und 60 cm langen Würfelstrecken;
  durch ein Scharnier sind verschiedene Winkel zur Tischebene einstellbar (25° und 40°); am oberen Ende ist ein bewegliches Blech zum Start der Würfel befestigt

Durchführung

Es werden jeweils 120 Würfe (diese Anzahl ist teilbar durch 6, daher ist die gleiche absolute Häufigkeit der Würfelergebnisse zu erwarten) ausgewertet und verglichen.

Mit jedem Würfel wird 120 mal aus der Hand gewürfelt.Zunächst so, wie man den Würfel zufällig aufnimmt, später werden die Bedingungen erweitert, sodass immer die 1 oben liegt und die 2 nach vorne in Wurfrichtung zeigt.

Mit dem Programm Exel erstellen wir eine Zufallstabelle, die wird zum Vergleich heranziehen. Auch hier kommt durch den Zufall eine nicht ganz gleichmäßige Verteilung der Wurfhäufigkeiten zustande.

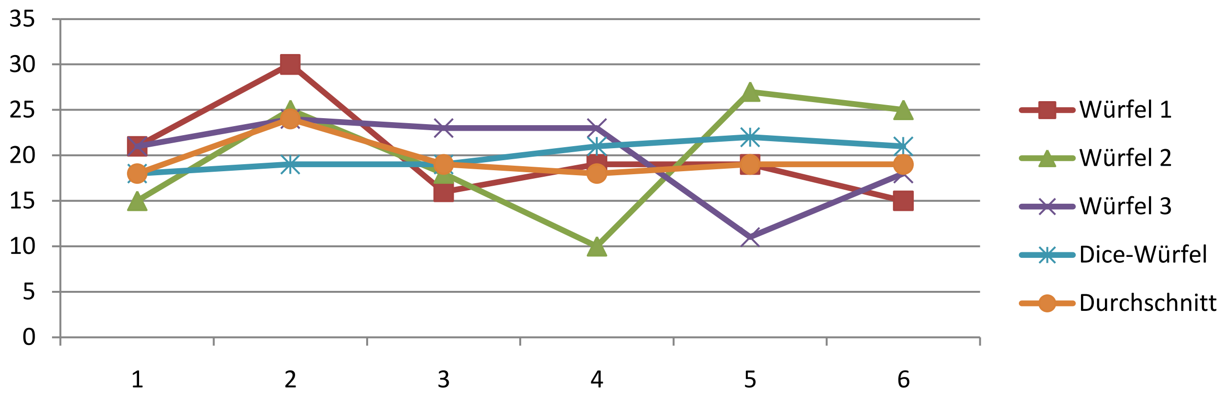
Mit jedem Würfelbrett werden in beiden vorgegebenen Winkeln pro Würfel 120 Würfe durchgeführt. Dazu wird die Klappe des Würfelbretts waagerecht ausgerichtet, um jedem Würfel den gleichen Impuls zu geben und damit vergleichbare Standards zu schaffen. Der Würfel wird aufgelegt, dabei liegt die 1 oben und die 2 zeigt nach vorne. Nach dem Loslassen der Klappe schlägt diese auf dem Brett auf und der Würfel startet. Die Ergebnisse werden in Tabellen übertragen.

Bei der Auswertung der Ergebnisse wird nach Häufungen gesucht und die Versuchsbedingungen bei Bedarf angepasst. Sollte sich herausstellen, dass das Ergebnis beeinflussbar ist, wird versucht, diesen Winkel „von Hand" zu trainieren und ebenfalls je 120 Würfe auszuwerten.

Freihandwürfeln

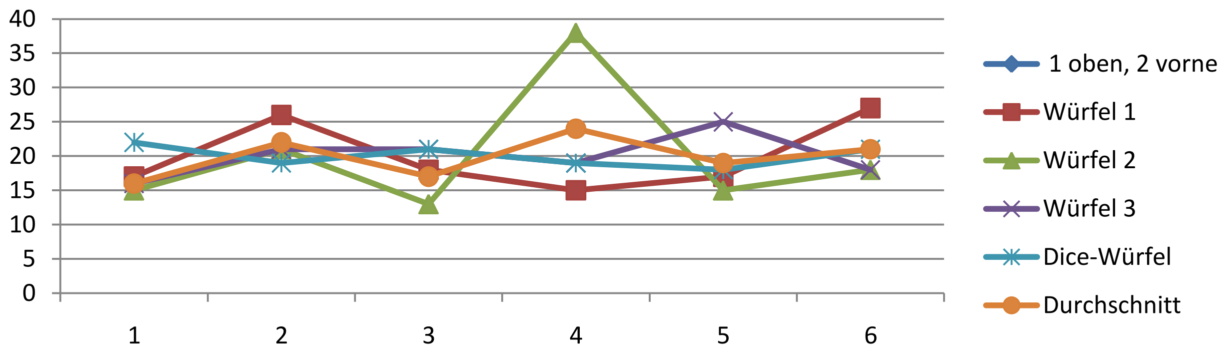
Je 120 mal, 3 verschiedene Würfel, ein Dice-Würfel

Wurf	1	2	3	4	5	6
Würfel 1	21	30	16	19	19	15
Würfel 2	15	25	18	10	27	25
Würfel 3	21	24	23	23	11	18
Dice-Würfel	18	19	19	21	22	21
Durchschnitt	18	24	19	18	19	19



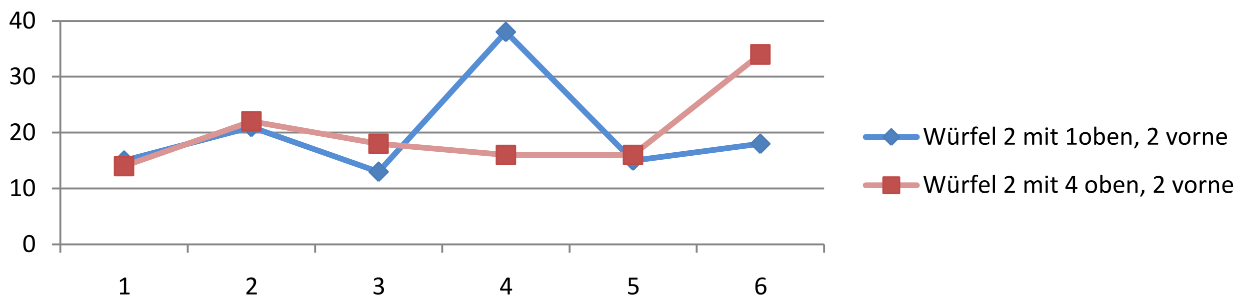
Freihandwürfeln, 1 oben, 2 vorne

1 oben, 2 vorne						
Würfel 1	17	26	18	15	17	27
Würfel 2	15	21	13	38	15	18
Würfel 3	16	21	21	19	25	18
Dice-Würfel	22	19	21	19	18	21
Durchschnitt	16	22	17	24	19	21



Bei Würfel 2 trat die 4 so oft auf, dass der Versuch mit 4 oben und 2 vorne wiederholt wurde, um möglichst viele 6er zu würfeln.

Würfel 2 mit 4 oben, 2 vorne	14	22	18	16	16	34



Im Diagramm sieht man sehr gut, wie sich die Spitze verschiebt.

Weitere Würfelreihen zu je 120 Wurf bestägten das, interessant ist dabei vor allem der Durchschnittswert. Die Wahrscheinlichkeit (fürMika), mit diesem Würfel aus der angegebenen Wurfposition eine 6 zu würfeln erhöht sich deutlich.

<u>Zum Vergleich wird mit Exel-Funktionen eine Zufallstabelle erstellt</u>

- Im Programm Exel gibt es eine Funktion ***Zufallszahl()***, die einen „zufälligen" Wert zwischen 0 und 1 liefert. Sie ist zu finden unter *Formeln*, links in der *Funktionsbibliothek*, im Unterordner *Mathematik und Trigonometrie*.
- Weil wir einen ganzzahligen zufälligen Wert suchen, wenden wir die Funktion ***Aufrunden(Zahl;Anzahl_Stellen)*** an. Zu finden ebenfalls unter *Formeln, Funktionsbibliothek, Mathematik und Trigonometrie.*

  Zahl soll in dieser Funktion die Zufallszahl sein und es soll auf 0 Dezimalstellen aufgerundet werden. Unsere Funktion lautet dann ***=Aufrunden (Zufallszahl();0)***.

- Weil beim Würfeln Werte zwischen 1 und 6 geworfen werden können, muss die Zufallszahl mit 6 multipliziert werden. Anschließend lautet die Funktion ***=Aufrunden (Zufallszahl()*6;0)***
- Diese Funktion fügen wir in 120 Zellen (Spalte A 1-120) ein.

Da wir etwas faul sind, überlassen wir dem Computer das automatische Zählen der Anzahl geworfener Würfe pro Augenzahl.

- Dazu wenden wir die Funktion ***Summewenn(Bereich;Suchkriterien;Summe_Bereich)*** an.

  Für Bereich wird A1:A120 eingesetzt, denn das sind ja die „Würfe“. Als Suchkriterium setzen wir die Augenanzahl ein, für die die Häufigkeit gesucht wird.
- Weil aber nur die Anzahl der Würfe und nicht die Summe gesucht wird, muss mit der Funktion ***Quotient(Zähler;Nenner)*** bereinigt werden.

  Für das „Wurfergebnis“ 2 lautet die Funktion also *=QUOTIENT(SUMMEWENN(A1:A120;2);2)*,

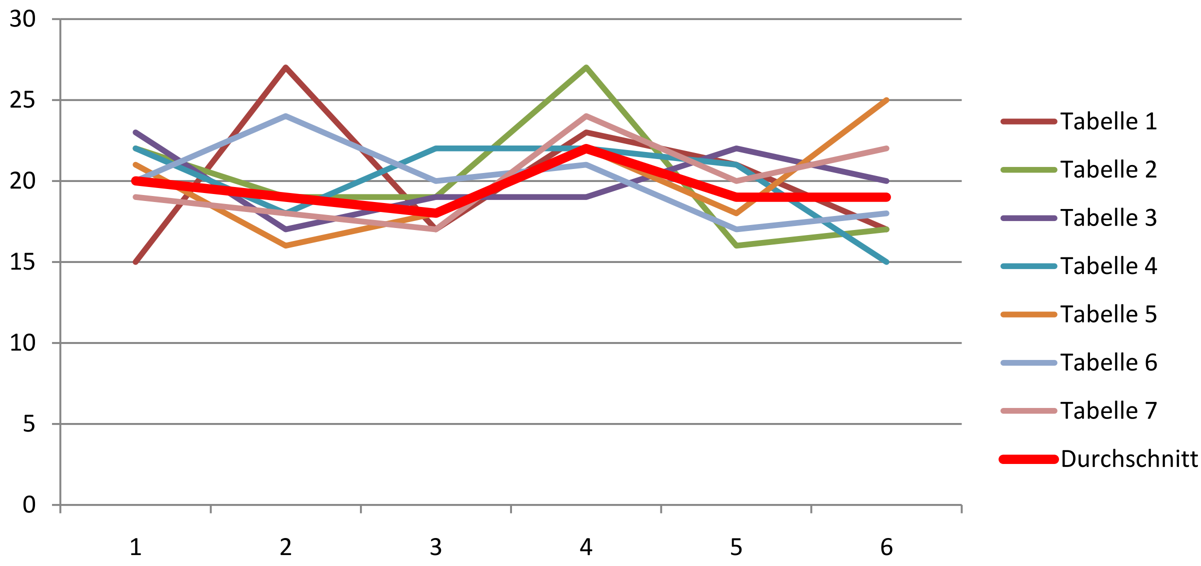
  für die Ereignisse 3 bis 6 wird genauso verfahren.

<u>Exel Zufallstabelle</u>

Weil der Computer die Datenreihen viel schneller liefert, als wir würfeln können, werten wir viele Zufallstabellen mit 120 „Würfen“ aus.

Wurf	1	2	3	4	5	6
Tabelle 1	15	27	17	23	21	17
Tabelle 2	22	19	19	27	16	17
Tabelle 3	23	17	19	19	22	20
Tabelle 4	22	18	22	22	21	15
Tabelle 5	21	16	18	22	18	25
Tabelle 6	20	24	20	21	17	18
Tabelle 7	19	18	17	24	20	22
Durchschnitt	20	19	18	22	19	19

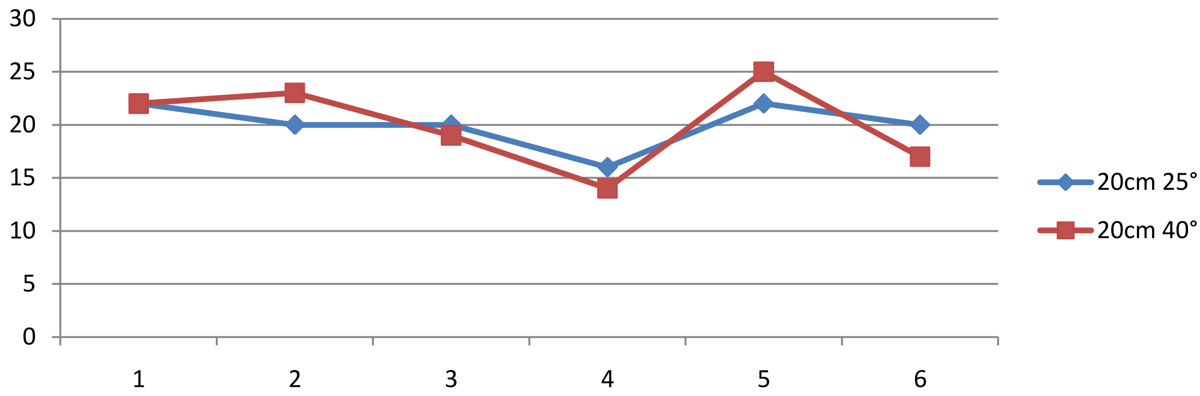
Dass die Summe des Durchschnitts nicht 120 ergibt, liegt am Auf-, bzw Abrunden.



Man sieht deutlich, dass in der Durchschnittslinie eine Abflachung stattfindet und der Wert sich mehr der zu erwartenden Häufigkeit von 20 nähert.

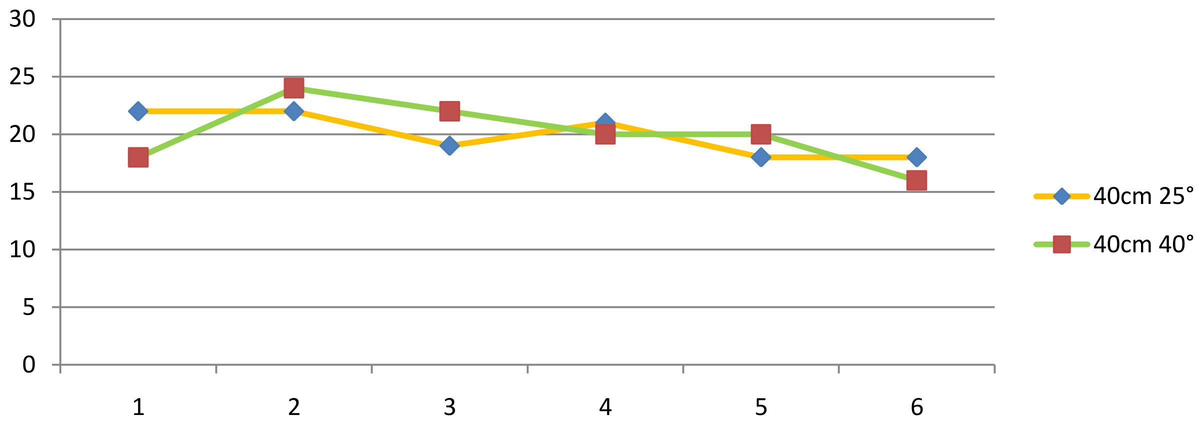
Würfelbrett 20 cm

Wurf	1	2	3	4	5	6
20cm 25°	22	20	20	16	22	20
20cm 40°	22	23	19	14	25	17



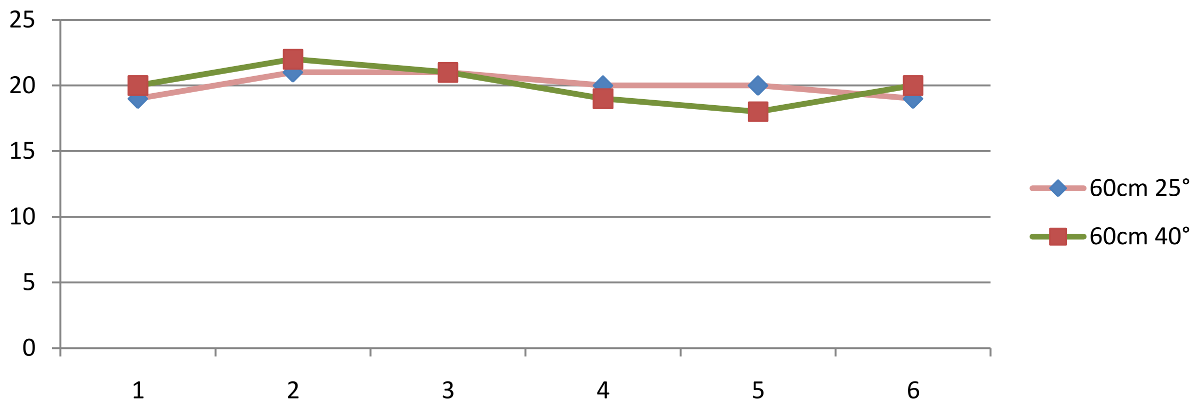
Würfelbrett 40 cm

Wurf	1	2	3	4	5	6
40cm 25°	22	22	19	21	18	18
40cm 40°	18	24	22	20	20	16



Würfelbrett 60 cm

Wurf	1	2	3	4	5	6
60cm 25°	19	21	21	20	20	19
60cm 40°	20	22	21	19	18	20



Auswertung der Ergebnisse

- Beim willkürlichen Freihandwürfeln gibt es Ergebnisse, die häufiger oder seltener vorkommen. Weil hier allerdings die Bedingungen willkürlich sind und die Würfel später auch keine „auffälligen“ Ergebnisse zeigen , also nicht gezinkt sind, scheint es sich hierbei um eine Unschärfe durch die zu kleinen Wurfanzahlen zu handeln. Auch die Exel-Zufallstabelle zeigt Schwankungen.

- Beim Freihandwürfeln mit den genormten Bedingungen 1 oben und 2 vorne in Würfrichtung zeigend fällt bei Würfel 2 auf, dass die 4 viel häufiger ist. Das Experiment wird mit gedrehtem Würfel wiederholt. Dabei rückt jetzt die als Wurfergebnis gewünschte 6 an der 4-er Position. Es wird also als neue Vorgabe mit der 4 oben und 2 vorne gewürfelt. Dabei treten gehäuft 6er Würfe auf.

- Wäre der Würfel gezinkt, dann wäre auch unter diesen Bedingungen keine Häufung bei 6, sondern weiter bei 4 aufgetreten. Die Ursache muss also in der Lageveränderung zu suchen sein.
- Weitere Würfelreihen zu je 120 Wurf bestägten das, interessant ist dabei vor allem der Durchschnittswert. Die Wahrscheinlichkeit für Mika mit diesem Würfel in genau dieser Lage eine 6 zu würfeln ist deutlich erhöht.

- Beim Würfeln mit dem Dice-Würfel fällt auf, dass der Würfel auf den längeren Bahnen stark gebremst wird, dadurch auch nach Verlassen des Bretts schnell liegen bleibt. Die Häufigkeit der gewürfelten Augen ist bei allen Längen und Winkeln sehr gleichmäßig verteilt. Dice-Würfel sind Casino Würfel, die keine gerundeten Kanten und Ecken haben. Sie werden mit sehr präzisen Kantenlängen hergestellt.

- Weil die Länge der Würfelbahnen und die Winkel / „Rutsch“-Geschwindigkeit keinen Einfluss auf die Augenzahl erkennen lassen, verzichten wir auf unser ursprünglich geplantes „Handwurf-Training“ mit dem wir Winkel und Geschwindigkeit nachstellen wollten.

Allgemeines zum Rechen mit Wahrscheinlichkeiten

Ergebnis

Ein Zufallsexperiment hat eine bestimmte Anzahl an möglichen Ergebnissen. Beim Würfeln mit einem Würfel sind es genau 6 mögliche Ergebnisse.

Ereignis

Das Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge. Als Ereignis kann das Würfelereignis 1 eintreten, oder 2, oder 3... . Die Ereignismenge ist {1;2;3;4;5;6}.

Es gibt sogenannte ***sichere Ereignisse***, in unserem Fall S = {1;2;3;4;5;6} und ***unmögliche Ereignisse*** U = { }, in unserem Beispiel alle Augenzahlen größer als 6.

Zu jedem Ereignis gibt es ein ***Gegenereignis***. Sind als Ereignis die geraden Augenzahlen definiert G= {2;4;6}, dann ist das Gegenereignis die Menge der ungeraden Augenzahlen U = {1;3;5}. Es könnte auch ein Wurf kleiner als 5 V = {1;2;3;4} als Ereignis gelten. Das Gegenereignis hierzu ist F = {5;6}.

Häufigkeit

Der ***absoluten Häufigkeit***, z.B. der gesamt gewürfelten Einsen A = {1} ohne Rücksicht auf die Anzahl der Würfe steht die ***relative Häufigkeit*** gegenüber. Hierbei wird die Anzahl der Versuche berücksichtigt, wenn also 15 von 120 Würfen die Augenzahl 1 zeigen, dann ergibt das eine relative Häufigkeit von 12,5 %.

Empirisches Gesetz der hohen Zahlen

Das sagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei einer hohen Anzahl von durchgeführten Zufallsexperimenten bei einem Wert einpendelt.

Zufallsexperiment

Ein ***einstufiges Zufallexperiment*** muss folgende Bedingungen erfüllen:

gleiche Bedingungen,
beliebig oft wiederholbar,
nicht vorhersehbar,
mindestens ein Ergebnis.

Einstufige Zufallsexperimente sind zum Beispiel Würfeln mit einem Würfel, das Werfen einer Münze, Kugeln ziehen (solange man die Kugeln immer wieder zurücklegt, bevor man erneut zieht) und Schnick-Schnack-Schnuck.

Es gibt auch ***mehrstufige Zufallsexperimente***, bei dem mehrere Teilexperimente nacheinander durchgeführt werden, z.B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 2 mal hintereinander eine 6 zu würfeln?

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich immer auf ein (einzelnes) Ereignis, nicht auf ein Ergebnis. Laplace-Experiment wird es genannt, wenn bei einem Zufallsexperiment jedes mögliche Versuchsergebniss der Ereignismenge mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{Anzahl der „günstigen“ Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Würfeln mit 1 Würfel:

In unserem Beispiel gibt es beim Würfeln mit 1 Würfel 6 mögliche Versuchsergebnisse: {1;2;3;4;5;6}. Die Ereignismenge sind 120 Würfe. Die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Ereignis beträgt $1/6$. Also ist die Anzahl „günstiger“ Ereignisse

$$\frac{1}{6} = \frac{x}{120}$$

$$\frac{120}{6} = x$$

$$20 = x.$$

<u>Würfeln mit 2 Würfeln</u>

Würfelt man 120 mal mit 2 Würfeln ändert sich für unseren Ursprungsversuch nichts. Wieder gibt es 6 mögliche Versuchsergebnisse, die Ereignismenge beträgt allerdings 2 x 120 = 240. Jede Augenzahl tritt 40 mal auf, die Wahrscheinlichkeit ist also weiter 1/6.

Betrachtet man die Summe der Augen, sieht dies schon anders aus, denn bestimmte Summen treten seltener auf als andere.

Mögliche Summen, wenn

erster Würfel 1: 2, 3, 4, 5, 6, 7,

erster Würfel 2: 3, 4, 5, 6, 7, 8,

erster Würfel 3: 4, 5, 6, 7, 8, 9,

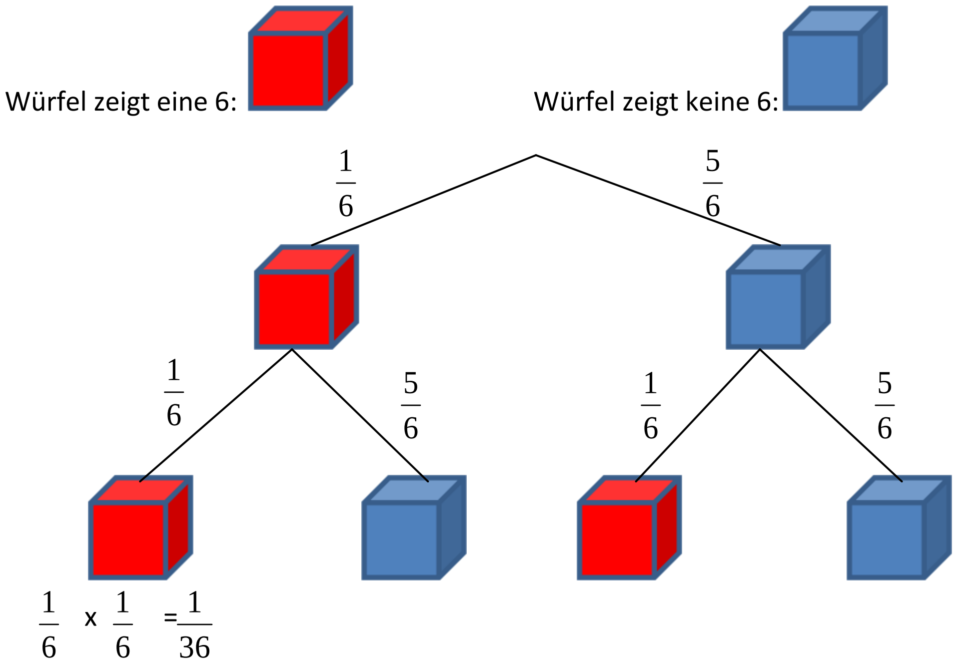
erster Würfel 4: 5, 6, 7, 8, 9, 10,

erster Würfel 5: 6, 7, 8, 9, 10, 11,

erster Würfel 6: 7, 8, 9, 10, 11, 12, ist.

<u>Pfadregel (Produktregel)</u>

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereigniss eintritt, ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten eines Pfades. Dazu kann man sich ein Baumdiagramm ansehen, hier zu der Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zweimal hintereinander eine 6 zu würfeln? Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis 6 eintritt ist $^1/6$. Das Gegenereignis keine 6 hat eine Wahrscheinlichkeit von $^5/6$.



Ereignisregel (Summenregel)

Wenn man ein mehrstufiges Zufallsexperiment durchführt, dann ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten eines bestimmten Ereignisses gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller dafür möglichen Pfade

Hierzu betrachten wir nochmal unser Beispiel Würfeln mit 2 Würfeln:

erster Würfel 1:	2,	3,	4,	5,	6,	7,					
erster Würfel 2:		3,	4,	5,	6,	7,	8,				
erster Würfel 3:			4,	5,	6,	7,	8,	9,			
erster Würfel 4:				5,	6,	7,	8,	9,	10,		
erster Würfel 5:					6,	7,	8,	9,	10,	11,	
erster Würfel 6:						7,	8,	9,	10,	11,	12,
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Schlußfolgerung/Ausblick

Wir habenkeine allgemeingültige Würfelformel gefunden, die vorhersagbare Ergebnisse liefert.

Weil Würfel ein Massenprodukt sind und nicht sehr präzise angefertigt werden (außer die Dice-Würfel), verhält sich jeder Würfel anders.

Es scheint möglich zu sein, für einen bestimmten Würfel bei einer sehr großen Anzahl Probewürfen eine Lage zu finden, bei der eine gewünschte Zahl häufiger gewürfelt werden kann als andere. Das ist allerdings auch abhängig von der persönlichen „Würfeltechnik“ und tritt nicht zuverlässig jedes Mal ein.

Auch wenn wir die ultimative Würfeltechnik für uns nicht gefunden haben: wir sind jetzt wahrscheinlich fit in Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Fazit

Spiele nie mit jemandem, der dies alles weiß und seine eigenen Würfel mitbringt

- oder benutzte stets einen Würfelbecher!

Quellen

www.mathe-online.at

www.mathe1.de Klasse 10 Wahrscheinlichkeit